FILIERE MP : ENS (PARIS) – ENS LYON – ENS CACHAN

PAGE DE GARDE DU RAPPORT DE TIPE 2012

NOM : Blanchard Prénoms : Nicolas Larry

Lycée : Université Paris VII

Classe : Licence 3 Mathématiques Fondamentales

Ville : Paris

Concours auxquels vous êtes admissible dans la banque inter-ENS :

(Mettre une croix très visible dans la ou les case(s) vous concernant)

ENS Cachan	MP - option MP		MP - option MPI	
	Informatique	X		
ENS Lyon	MP - option MP		MP - option MPI	
	Informatique - option M	X	Informatique - option P	
ENS (Paris)	MP - option MP		MP - option MPI	
	Informatique	X		

Matière dominante du TIPE : Mathématiques
(mathématiques, informatique ou physique)

Titre du TIPE : Version aléatoire du jeu de l'Ange de Conway

Nombre de pages (à porter dans les cases ci-dessous) :

Texte	**T** 8	Illustrations	**I** 0	Bibliographie	**B** 1		

Résumé imprimé (6 lignes) :

On étudie le problème de l'Ange, jeu combinatoire abstrait sur un plateau infini modélisé par ZxZ. Après avoir introduit des résultats en deux dimensions, on procède à une première généralisation en n-dimensions. On étudie ensuite le cas où l'Ange joue de façon aléatoire suivant une loi de probabilité uniforme puis avec des conditions moins fortes. On montre qu'il existe à chaque fois une stratégie telle que l'Ange perde presque sûrement. Enfin, on étend ce résultat à une classe de jeux combinatoires plus générale.

A Paris, le 06/06/2012
Signature du (de la) candidat(e)

Signature du professeur responsable de la classe préparatoire dans la discipline

Cachet de l'établissement

Le problème de l'Ange probabiliste

Travail d'Initiative Personnelle Encadré de Nicolas Blanchard

Résumé

On étudie ici le problème du jeu de l'Ange, introduit en 1984 par Berlekamp et Conway et résolu en deux dimensions en 2006 simultanément par plusieurs chercheurs. Nous nous pencherons dans ce travail sur deux variations de ce jeu combinatoire, tout d'abord dans une généralisation à n dimensions puis dans le cas d'un Ange jouant de manière aléatoire.

I Ange standard

I.1 Problème original

a. Présentation du jeu

Dans sa version originale [1][2], le jeu de l'Ange est un jeu combinatoire à deux joueurs à information parfaite. Il se joue sur un plateau infini modélisé par $\mathbb{Z}^2$ muni de la distance correspondant à $\| \|_\infty$.

Le premier joueur, nommé "le Démon", colorie à son tour une case quelconque du plateau. Le deuxième joueur, nommé "l'Ange de puissance p", peut à chacun de ses tours se déplacer sur n'importe quelle case non-coloriée se trouvant à une distance inférieure ou égale à p de sa position actuelle sur le plateau. L'Ange perd s'il n'a aucune case disponible sur laquelle aller. Il gagne s'il échappe indéfiniment au Démon. La question est de savoir si il existe un entier p tel que l'Ange de puissance p ait une stratégie gagnante.

b. Premiers résultats simples

En 2 dimensions, l'Ange de puissance 1 perd avec la combinaison de deux méthodes visant à créer un enclos carré centré sur lui. Tout d'abord, le Démon colorie quatre zones correspondant aux coins d'un carré (voir figure 1) suffisamment grand. Il existe ensuite un algorithme simple permettant au Démon de construire une barrière empêchant l'Ange de passer si celui-ci commence à une distance ≥ 5 de la barrière.

Conway [1] a montré que l'Ange obligé d'augmenter strictement sa coordonnée y -"l'idiot"- perd quelle que soit sa puissance. Il montre de même que pour tout $k \in \mathbb{N}$, si l'Ange ne descend jamais en-dessous de $(y_{max} - k)$ avec y_{max} le plus grand y qu'il ait atteint au cours de son trajet, alors le Démon gagne.

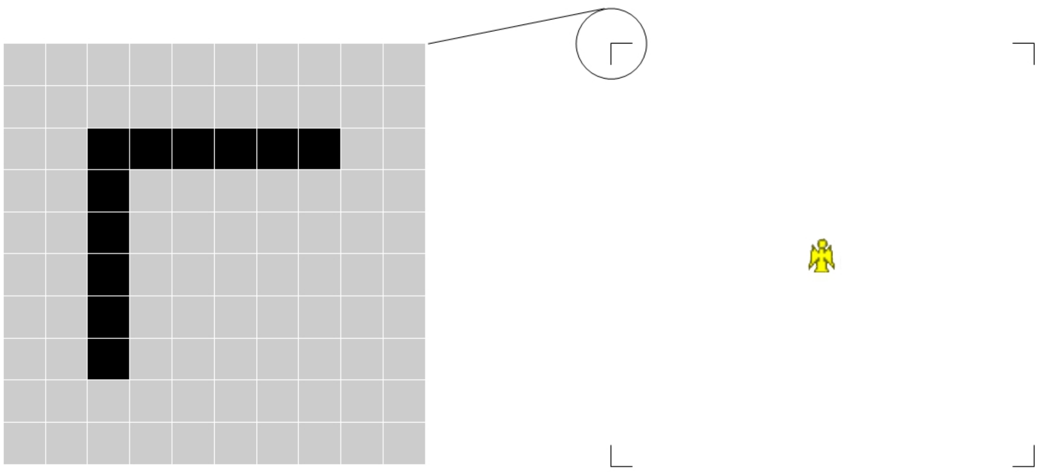

FIGURE 1: *Stratégie contre un Ange de puissance 1*

I.2 Solution de Klöster au problème 2D

On montre ici rapidement la méthode que Oddvar Klöster utilise pour prouver qu'un ange de puissance $p = 2$ gagne en deux dimensions [3]. Il existe d'autres preuves de ce résultat [6][7].

a. La stratégie

L'Ange sépare le plateau en deux demi-plans infinis, séparés par une frontière orientée. Il déclare le demi-plan gauche interdit. L'Ange commence et se déplace le long de cette frontière, vérifiant à chaque tour l'état de celle-ci et la mettant à jour en appliquant des opérations élémentaires selon des règles simples. Le but est de prouver que l'Ange n'arrive jamais sur une case coloriée. Les opérations élémentaires sur la frontière sont les suivantes :

- l'*extension* : une des cases immédiatement à droite de la frontière est déclarée comme étant interdite par l'Ange. La frontière se met à jour en contournant cette case.
- la *contraction* : si deux segments de longueur 1 consécutifs de la frontière sont de directions contraires, on les supprime.

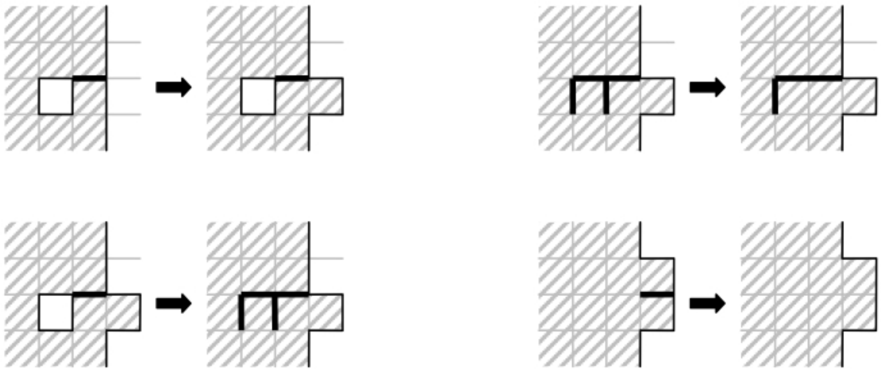

FIGURE 2: *Un exemple : à gauche des extensions, à droite des contractions*

La stratégie de l'Ange consiste à avancer le long de la frontière. Il avance toujours de sa puissance maximale dans une direction. Si la frontière tourne, il avance autant qu'il peut, et ira dans sa nouvelle direction au tour suivant. La frontière obéit aux règles suivantes :

- Elle se met à jour après chaque tour du Démon.
- Elle est au départ une ligne verticale passant à gauche de l'Ange.
- Elle se met à jour chaque tour par un nombre fini d'extension et de contractions.
- Si en se mettant à jour, la frontière peut mettre dans la zone interdite au moins une case coloriée par le Démon au prix d'une augmentation de longueur 2 au maximum par case, elle le fait.

b. La preuve

On donne ici le schéma de preuve de Klöster.
L'Ange gagne si la stratégie ne le fait jamais tomber sur une case coloriée. Il faut montrer que :

1. Il ne tombe jamais sur une case coloriée hors de la zone interdite. C'est trivial si la case n'est pas contre la frontière (l'Ange suit la frontière), et également trivial si elle se situe contre la frontière, car celle-ci se met immédiatement à jour par une extension.
2. Il ne tombe jamais sur une case coloriée dans la zone interdite. En réalité, il ne tombe jamais dans la zone interdite, c'est donc également un cas trivial.
3. Il ne peut pas y avoir de zone interdite des deux côtés de la frontière devant l'Ange. C'est ici que réside la difficulté qui se résout en considérant le nombre de coups nécessaires pour parvenir à un cas de ce type, et en montrant que la frontière serait modifiée avant que le Démon ait fini.

I.3 Cas n-dimensionnel

Comme l'Ange de puissance 2 gagne en 2D, il gagne aussi dans toutes les dimensions supérieures. On peut toutefois étudier ce qui se passe avec des puissances rationnelles comprises entre 0 et 2. Dans le cas des puissances non-entières, on considère l'alternance des joueurs comme les lettres du mot Sturmien caractéristique de pente p [1]. Kutz a montré que l'Ange perd en 2D pour tout $0 < p < 2$ [6]. Cependant ce résultat devient faux en 3D où une puissance de 1 suffit à l'Ange pour gagner [5]. En effet, la solution de Klöster peut s'adapter en considérant un Ange de puissance 1 et un Démon ayant besoin de deux tours pour colorier une case [4]. On peut faire une correspondance directe avec une 3D où l'Ange est limité à deux plans. L'Ange de puissance 1 gagne donc en nD pour $n \geq 3$.

Enfin, on peut montrer que pour tout n, il existe une puissance p telle que l'Ange de puissance p perde : il suffit que p soit suffisamment petit pour que le Démon ait le temps de colorier les bords d'un hypercube de dimension n au fur et à mesure que l'Ange se déplace à l'intérieur. La borne des $\frac{1}{3^n-2^n}$ suffit, et on peut avec une stratégie plus évoluée atteindre $\frac{1}{3^n-2^n-1}$.

1. C'est-à-dire que l'on considère les intersections d'une droite de pente p avec les ensembles de droites $\{x = m, m \in \mathbb{Z}\}$ et $\{y = l, l \in \mathbb{Z}\}$. On considère qu'on avance sur cette droite en partant de l'origine, chaque intersection avec une droite horizontale(respectivement verticale) correspond à un coup de l'Ange(respectivement du Démon).

II Ange probabiliste

II.1 Préliminaires

a. Définition

L'Ange probabiliste est un Ange de puissance constante qui à chaque tour choisit la case sur laquelle il va en fonction d'un loi de probabilité relative à sa position que l'on suppose constante au cours du temps. Dans le cas où certaines des cases atteignables sont coloriées, on multiplie le reste des probabilités afin d'obtenir une somme de 1 (ce qui conserve la proportionnalité). Pour des soucis de commodité, on permet au Démon de sauter son tour, ce qui correspond à colorier deux fois la même case.

b. Notations

On notera $\mathcal{D}$ la zone des $(2p+1)^n$ déplacements possibles de l'Ange à un moment donné en dimension n (hypercube d'arête $(2p+1)$ centré sur l'Ange).
On nomme "bloc de côté x" un hypercube d'arête de longueur x. On considérera des divisions de l'espace $\mathbb{Z}^n$ en blocs.
On divisera chaque hypercube de dimension n en 2^n quadrants(se recoupant), c'est-à-dire en ensembles tels que $\{\forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i \oplus_i 0,\ \oplus_i \in \{\leq\ ;\ \geq\}\}$ avec le centre de l'hypercube comme origine. Il y a toujours au moins un quadrant entier de $\mathcal{D}$ dans le bloc où se trouve l'Ange.
On nommera "essai" le fait pour un Démon de tenter de bloquer l'Ange en coloriant les $3^n - 1$ blocs environnants. Au cours d'un essai, si l'Ange change de bloc, le Démon termine le coloriage du bloc actuel avant de passer à un autre essai.

c. Méthode

Nous allons nous attacher à trouver une stratégie presque sûrement gagnante pour le Démon. Il divise l'espace considéré en blocs de côté $(2p+1)$. On montrera alors qu'à chaque essai, le Démon a une probabilité constante (même si faible) de bloquer l'Ange dans un espace borné. Considérant que le Démon fait une infinité d'expériences de ce type, on pourra utiliser le lemme de Borel-Cantelli, démontrant ainsi que le Démon bloque l'Ange dans un espace borné avec une probabilité 1. Or, si le Démon bloque l'Ange dans une région bornée de l'espace, il gagne. On supposera d'abord que la loi de probabilité gérant les coups de l'Ange est uniforme avant d'en étudier des variations.

II.2 Cas 2D

On suppose que l'Ange commence dans un bloc B_0 de $(2p+1)^2$ cases. Le Démon va alors tenter de colorier successivement les 8 blocs environnants. Tant que l'Ange reste dans B_0, la probabilité qu'il y reste au coup suivant est minorée par $\frac{1}{4}$. En effet, il y a 4 quadrants et au moins un d'eux entièrement inclus dans B_0. Il faut au Démon $(2p+1)^2$ coups pour colorier un bloc et donc $8 \cdot (2p+1)^2$ coups pour borner l'Ange s'il reste dans B_0. La probabilité que le Démon réussisse son essai est donc minorée par $\left(\frac{1}{4}\right)^{8\cdot(2p+1)^2}$.

Si l'Ange sort de B_0, le Démon finit de colorier le bloc courant. On appelle alors B_1 le bloc dans lequel se trouvera l'Ange au premier tour après que le Démon ait fini le coloriage du bloc qu'il avait commencé. La probabilité de capturer l'Ange est à nouveau minorée par $\left(\frac{1}{4}\right)^{8\cdot(2p+1)^2}$.

On considère la suite d'événements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, avec A_i : "l'Ange s'est échappé du bloc B_i". On voit que

$$\mathbb{P}(A_{i+1}) \leq (1 - (\frac{1}{4})^{8\cdot(2p+1)^2}) * \mathbb{P}(A_i).$$

On peut donc majorer $\mathbb{P}(A_i)$ par $(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{8\cdot(2p+1)^2})^{i+1}$.

On a

$$\sum_{i\geq 0} \mathbb{P}(A_i) \leq \sum_{i\geq 0} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{8\cdot(2p+1)^2}\right)^{i+1} \leq 4^{8\cdot(2p+1)^2} < +\infty.$$

Par le lemme de Borel-Cantelli, on obtient

$$\mathbb{P}(\limsup_i A_i) = 0.$$

La probabilité que l'Ange s'échappe d'une infinité de blocs est donc de 0. Le Démon gagne presque sûrement.

II.3 Cas n-dimensionnel

On peut généraliser le résultat précédent en n-dimensions. Le bloc B_i possède $(2p+1)^n$ cases et $(3^n - 1)$ blocs adjacents. Il y a à nouveau un quadrant de $\mathcal{D}$ entièrement inclus dans B_i et donc la probabilité que l'Ange reste dans B_i est minorée par $\frac{1}{2^n}$.

Sachant qu'il faut $(2p+1)^n$ coups pour colorier un bloc, la probabilité que l'Ange soit bloqué dans B_i est minorée par $\left(\frac{1}{2^n}\right)^{(3^n-1)(2p+1)^n}$. De ceci on déduit :

$$\sum_{i\geq 0} \mathbb{P}(A_i) \leq 2^{n(3^n-1)(2p+1)^n} < +\infty.$$

De même qu'en deux dimensions, par le lemme de Borel-Cantelli, le Démon gagne presque sûrement en n-dimensions.

II.4 Cas d'une loi non uniforme

Attachons-nous désormais à une loi non uniforme, mais toujours constante au cours du temps. Si les sommes des probabilités sur chacun des quadrants sont toutes non nulles, la probabilité que l'Ange reste dans le bloc est minorée par la plus petite de ces valeurs. Dans ce cas, on peut utiliser la méthode précédente pour montrer que le Démon gagne presque sûrement.

Quand la condition sur les quadrants n'est pas vérifiée, cette méthode ne marche plus à priori. On peut toutefois deux solutions :

- Quand l'Ange a une probabilité de rester pendant un temps arbitrairement long dans une zone bornée de l'espace [2], l'utilisation d'une méthode dérivée de la précédente est possible avec des blocs de taille suffisamment grande pour bloquer l'Ange.
- Quand aucune de ces conditions n'est satisfaite, il existe une stratégie moins efficace et plus générale qui sera développée dans le III.3 et qui permet de capturer l'Ange presque sûrement.

2. Condition équivalente à celle sur les quadrants en 2D, mais pas en n-dimension.

III Ange accélérant

III.1 Préliminaires

Dans cette section, nous allons nous intéresser au cas d'un Ange probabiliste dont la puissance augmente en fonction du temps. Cela influe sur la loi de probabilité et celle-ci devient dépendante du temps. Nous garderons la restriction au cas d'une loi uniforme à chaque instant. De plus, on adaptera le problème, considérant que le Démon ne peut colorier la case sur laquelle se trouve l'Ange. Ce dernier perd si il est coincé sur une case pour un temps infini.

Un résultat immédiat est que la fonction de la puissance en fonction du temps $p(t)$ est restreinte à $O(t^{\frac{1}{n}})$, car sinon, la puissance de l'Ange augmenterait suffisamment pour qu'il puisse s'échapper d'une prison déjà construite.

III.2 Adaptation de la méthode et limites

Si l'Ange a une accélération suffisante, il gagne sûrement (pas de presque, vu qu'il ne peut pas être bloqué pendant un temps infini). On va montrer qu'il existe cependant une accélération telle que l'Ange perd presque sûrement.

Pour ce faire, on considère que l'Ange augmente sa puissance de manière discrète. On note T_{2^i} le moment où il atteint la puissance $p = 2^i$ et Δ_{2^i} une majoration du nombre de blocs intégralement coloriés et de côté 2^{i+1} à T_{2^i}. À T_{2^i}, le Démon considère une partition de l'espace en bloc de côté 2^{i+2}. Il y a au plus Δ_{2^i} blocs partiellement coloriés. En premier lieu, le Démon colorie entièrement ces blocs. Il fait ensuite un nombre d'essais que l'on note Φ_{2^i} comme s'il luttait contre un Ange de puissance $2^{i+1} - 1$. On peut trouver deux suites $(\Phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\Delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que la probabilité que l'Ange perde entre T_{2^i} et $T_{2^{i+1}}$ soit minorée par une constante strictement positive.

Supposons que $\Phi_{2^i} = 2^{n(3^n-1)(2^{i+2}+1)^n}$ et que $\Delta_{2^i} \leq \Phi_{2^i}$. Alors :

$$\Delta_{2^{i+1}} \leq \Phi_{2^i}(3^n - 1) + \Delta_{2^i} \leq \Phi_{2^i} \cdot 3^n \leq \Phi_{2^{i+1}}.$$

De plus, si le Démon réalise un essai avec des blocs de taille 2^{i+2} et un Ange de puissance strictement inférieure à 2^{i+1}, il a une probabilité $\mathbb{P}(\mathcal{R}_{2^i})$ de réussite telle que :

$$\mathbb{P}(\mathcal{R}_{2^i}) \geq \frac{1}{2^{n(3^n-1)(2^{i+1}+1)^n}} \geq \frac{1}{2^{n(3^n-1)(2^{i+2}+1)^n}}.$$

La probabilité que l'Ange s'échappe entre T_{2^i} et $T_{2^{i+1}}$ est inférieure à $(1 - \mathbb{P}(\mathcal{R}_{2^i}))^{\Phi_{2^i}}$, donc à $(1 - \frac{1}{\Phi_{2^i}})^{\Phi_{2^i}}$. Or la fonction $n \longmapsto (1 - \frac{1}{n})^n$ est majorée par $\frac{1}{e}$. On applique le lemme de Borel-Cantelli pour prouver que l'Ange perd presque sûrement.

On voit qu'une condition suffisante (mais pas nécessaire) sur les T_{2^i} est que

$$T_{2^{i+1}} - T_{2^i} \geq 3^n (2^{i+2})^n \Phi_{2^i}.$$

On peut montrer que les fonctions du type $p(t) = \left\lfloor \sqrt[\gamma]{\frac{\log_2(\frac{t}{\alpha})}{\beta}} \right\rfloor$ satisfont cette condition avec α, β et γ réels suffisamment grands.

III.3 Généralisation à divers jeux

Les conditions précédentes qui donnent des solutions aux variations du problème peuvent en réalité être généralisées avec un résultat plus global, qui n'est pas limité au jeu de l'Ange. Ce résultat, s'il donne une stratégie et une borne très mauvaise dans le cas du jeu de l'Ange, a toutefois le mérite d'assurer l'existence d'une stratégie gagnante.

a. Propriété

On considère donc la classe G des jeux satisfaisant les critères suivants :

($\mathcal{C}$.1) G est un jeu combinatoire abstrait à deux joueurs : J_1 et J_2

($\mathcal{C}$.2) Il n'existe pas de partie ayant un nombre de coups finis faisant gagner J_1.

($\mathcal{C}$.3) Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que depuis toute situation m du jeu, il existe une suite d'au maximum k coups pour J_1 et J_2 qui se termine par une victoire J_2. Les coups de J_1 seront notés les $C_{m,i}$ avec $1 \leq i \leq \dfrac{k+1}{2}$.

Si un jeu appartient à G et que J_1 joue de manière aléatoire avec une loi satisfaisant les deux critère suivants :

($\mathcal{C}$.4) Il existe une fonction décroissante $f(t)$ telle que pour tout m atteignable en t coups, $\prod\limits_i \mathbb{P}(C_{m,i}) \geq f(t)$.

($\mathcal{C}$.5) Il existe une constante α telle que $\prod\limits_{i=0}^{n} (1 - f(k * i)) \leq \dfrac{\alpha}{n^2}$.

Alors J_2 gagne presque sûrement.

b. Preuve

On considère l'arbre des coups possible de J_1. La probabilité que J_1 perde entre le tour 0 et le tour k est minorée par $\prod\limits_i \mathbb{P}(C_{m_0,i})$ où m_0 est la situation initiale. De même, la probabilité que J_1 perde entre le tour $k * j$ et $k * (j+1) + 1$ est minorée par $\prod\limits_i \mathbb{P}(C_{m,i})$, donc par $f(k * j)$. La probabilité que J_1 n'ait pas perdu au tour $k * j + 1$ est donc inférieure à $\prod\limits_{i=0}^{j} (1 - f(i * k))$.
Si on considère comme auparavant la suite d'événements A_i, on voit que la somme des probabilités de ceux-ci est bornée par $\dfrac{\alpha\pi^2}{6}$. En appliquant Borel-Cantelli, on en déduit que la probabilité qu'une infinité d'entre eux se réalisent est nulle et que le Démon gagne presque sûrement.

En réalité, le critère ($\mathcal{C}$.5) est suffisant mais pas nécessaire, on peut trouver une meilleure borne. Celle proposée ici peut suffire pour les usages courants. Elle suffit pour montrer par exemple que les fonctions positives du type $f(t) = \dfrac{\beta(2a_1 t + a_2 - a_1)}{a_1 t^2 + a_2 t + a_3}$, avec $\beta,\ a_1 \in \mathbb{R}^*$ et $a_2,\ a_3 \in \mathbb{R}$ conviennent.

Le problème de cette stratégie est qu'elle donne de mauvaises bornes sur les expériences individuelles. En effet, les nombres considérés lors de son application au problème de l'Ange deviennent vite incalculables même pour de faibles valeurs de n et p.

Références

[1] J.H. Conway. "The Angel Problem". Dans : *Games of No Chance* 29 (1996), p. 3–12.

[2] J.H. Conway E.R. Berlekamp et R.K. Guy. *Winning Ways for your Mathematics Plays, volume 2 : games in particular.* Academic Press, 1982.

[3] O. Klöster. *A Solution to the Angel Problem.* 2007. url : `http://home.broadpark.no/~oddvark/angel/Angel.pdf`.

[4] O. Klöster. *The Angel Problem Variations.* 2007. url : `http://home.broadpark.no/~oddvark/angel/variations.html`.

[5] M. Kutz. "Conway's Angel in Three Dimensions". Dans : *Theoratical Computer Science* 349 (2005), p. 443–451.

[6] M. Kutz. "The Angel Problem and Weak Positionnal Diagraph". Thèse de doct. Freie Universität Berlin, 2004.

[7] A. Máthé. "The Angel of Power 2 Wins". Dans : *Combinatorics, Probability and Computing* 16 (2007), p. 363–374.