Chez Euclide et au-delà

Enka Blanchard, Andreï Rodin et Florentin Waligorski
Chercheuse transdisciplinaire au CNRS
Philosophe-mathématicien
Traducteur scientifique

Le terme de « géométrie » évoque immédiatement un ensemble standard de formes géométriques telles que le cercle, le triangle, le carré, le rectangle… que l'on retrouve dans tous les manuels de mathématiques élémentaires. Ces derniers suivent d'ailleurs une très longue tradition historique, leur origine remontant à un recueil de textes mathématiques, *Les Éléments*, rédigé par Euclide, mathématicien grec d'Alexandrie. Donnons un aperçu de l'évolution de ces concepts depuis leur introduction il y a près de deux mille trois cents ans.

Un premier classement des formes géométriques avec Euclide

Le premier livre des *Éléments* commence par une liste de définitions (23 au total) qui introduisent un ensemble d'objets et de formes géométriques. La première présente un *point* (comme ce qui n'a « *aucune partie* ») et la deuxième une *ligne* (générique) et, plus spécifiquement, une *ligne droite*, qu'Euclide entend comme un segment délimité par des points. Il introduit de manière similaire les *surfaces*, les *plans*, puis des angles de différentes sortes ; l'*angle plan*, défini comme une « *inclinaison de lignes* » (pas nécessairement droites), soulevait déjà de nombreuses questions dans l'Antiquité.

Euclide. Girolamo Mocetto, XVI[e] siècle.
©*É.T., 2021 (musée Jacquemart André, Paris)*

Ce développement atteint son apogée avec la définition 14, qui établit le concept de figure (*schéma*, en grec) comme étant « *ce qui est compris entre une ou plusieurs limites* ». Le reste des définitions apparaît comme une classification des figures (à part la dernière, qui concerne les lignes parallèles). Cette classification ne ressemble à aucune

autre moderne, en mathématiques ou ailleurs, et il est important de comprendre ses spécificités pour appréhender la géométrie d'Euclide en général (qu'il ne faut pas confondre avec la géométrie euclidienne au sens moderne du terme).
On pourrait s'attendre à ce qu'après avoir introduit le concept très général de figure, Euclide considère ensuite quelques grandes classes de figures, suivies par de plus spécifiques, et enfin seulement des exemples concrets. Au lieu de cela, il définit un *cercle* et ses éléments (son *centre* et son *diamètre*) et des *figures rectilignes*, c'est-à-dire des polygones : d'abord les *trilatères* (triangles) et puis les *quadrilatères* (quadrangles).
Un tel classement peut s'expliquer par le fait qu'Euclide ne considère pas toutes les figures géométriques possibles sur un pied d'égalité. Au contraire, il désigne une figure *«générique»* qui, à son avis, représente mieux le concept général, à savoir le cercle. Le même principe s'applique à ses classifications des triangles et des quadrangles. Dans le cas des triangles, il distingue d'abord le triangle *équilatéral* (régulier), puis introduit les triangles *isocèles* et enfin les triangles *scalènes* («quelconques»). Le triangle équilatéral n'est pas qualifié d'isocèle et le triangle isocèle n'est pas qualifié de scalène ; c'est donc un classement en catégories mutuellement exclusives. Dans le cas des quadrangles, Euclide présente d'abord le *carré*, puis les *rectangles*, et d'autres formes. L'idée est en fait de distinguer en premier lieu les espèces *«parfaites»* d'un genre donné, puis de trier les autres en fonction de leur *«qualité»*.
La plupart des définitions géométriques et arithmétiques d'Euclide, du point de vue actuel des mathématiques et surtout de la logique, sont redondantes et jouent, au mieux, un rôle heuristique. Toutefois, il faut rester prudent en appliquant des normes modernes à des textes mathématiques anciens, et garder à l'esprit que les normes logiques et épistémologiques changent au cours de l'histoire.

Deux objets au statut particulier : la droite et le cercle

Le rôle particulier du cercle dans le raisonnement géométrique d'Euclide est également évident dans la théorie suivante. Dans les *Éléments*, les vingt-trois définitions du Livre 1 fournissent une description préliminaire autonome et une classification de la variété des formes géométriques étudiées dans ce qui suit, sans donner de conventions terminologiques utiles. En effet, on retrouve cinq postulats faisant suite à ces définitions. Les trois premiers spécifient les constructions géométriques faites *«à la règle et au compas»* : ils autorisent la production d'une ligne droite *«entre n'importe quels points»*, le prolongement illimité d'une ligne droite donnée (bornée) au-delà de n'importe lequel de ses deux points d'extrémité, et enfin, la production d'un cercle dont le rayon coïncide (et n'est pas seulement égal) à une ligne droite donnée. Ces trois postulats soulignent le rôle particulier du cercle et de la droite dans la géométrie d'Euclide. Toutes les constructions géométriques traitées dans les *Éléments* peuvent être obtenues à la règle et au compas (avec des utilisations occasionnelles du postulat 5, qui nécessite une discussion séparée). Une telle construction d'un objet donné est la «*synthèse*». La procédure inverse est appelée l'«*analyse*» d'un objet géométrique donné en ses éléments constitutifs. Ici, les concepts de ligne droite et de cercle jouent le rôle d'éléments ultimes qui génèrent tout objet géométrique à partir des variétés géométriques d'Euclide – ou, réciproquement, qui sont trouvés comme éléments constitutifs de base de n'importe quel objet géométrique lors de son analyse.

Tous les objets et constructions géométriques d'intérêt ne s'inscrivent pourtant pas facilement dans ce schéma. Par exemple, les constructions d'un carré dont la surface est égale à celle d'un cercle donné, la trisection d'un angle (division d'un angle donné en trois angles égaux) et le doublement du volume d'un cube résistaient à l'analyse euclidienne en termes de lignes droites, d'angles et de cercles. Il était suspecté depuis Euclide que ces trois constructions ne peuvent pas être réalisées à l'aide d'une règle et d'un compas en un nombre fini d'étapes, mais cela n'a été rigoureusement prouvé par des méthodes algébriques qu'au XIXe siècle. Que se cache-t-il derrière l'idée de construire des objets géométriques avec ces instruments plutôt que d'autres ? Historiquement, cela pourrait être lié à leur simplicité et à leur utilité pratique. Cependant, l'idée émanant des postulats 1 à 3 d'Euclide consiste en ce que les formes géométriques sophistiquées peuvent être expliquées en termes de certaines formes primitives, à savoir la ligne droite et le cercle.

Des figures égales, congruentes ou équidécomposables

Après avoir énoncé les postulats, Euclide énonce plusieurs axiomes. Il s'agit de principes généraux applicables à la fois aux objets géométriques et aux nombres (entiers naturels), qui établissent notamment la relation d'égalité pour ces concepts. Les axiomes 2 et 3 déterminent que des choses égales ajoutées (ou soustraites) à d'autres sont égales. Dans le cas des objets géométriques, l'addition est comprise comme une concaténation, c'est-à-dire une adjonction d'un objet donné à un autre. Par exemple, le résultat de la concaténation des segments de droite [AB] et [BC] est le segment [AC] (avec nos notations modernes) ; les polygones peuvent être concaténés le long de leurs côtés (même si le résultat de cette opération n'est pas défini de manière unique jusqu'à la congruence). La soustraction d'objets géométriques est comprise par Euclide dans un sens intuitif similaire : le résultat de la soustraction du segment [AB] du segment [AC] est [BC]. Ainsi, l'égalité des objets géométriques A = B au sens d'Euclide, en termes modernes, revient à leur équidécomposabilité : A et B sont *équidécomposables* si ces objets peuvent être composés (par concaténation) à partir du même ensemble d'objets.

Dans le cas des segments et des polygones, l'équidécomposabilité est équivalente à l'égalité de leurs mesures : les longueurs pour les premiers et les aires pour les seconds. Pour cette raison, on pourrait croire que, dans les deux premiers livres de ses *Éléments*, Euclide fournit une théorie des aires pour les polygones. Cette affirmation ne peut être acceptée que dans le cas du théorème selon lequel deux polygones donnés sont égaux (au sens d'Euclide) si, et seulement si, leurs aires sont identiques. Une proposition similaire pour les segments est évidente. Cependant, on ne trouve rien chez Euclide qui ressemble aux concepts modernes d'aire et de longueur, qui sont définis comme des nombres réels associés aux objets géométriques correspondants. Conceptuellement, la théorie d'Euclide est très différente.

Par extension, l'équivalence entre l'équidécomposabilité géométrique et l'égalité de mesure devient caduque dans le cas des polyèdres : si les polyèdres équidécomposables ont le même volume, l'affirmation universelle inverse est fausse. Cela ne sera connu qu'en 1900, peu après que David Hilbert eut présenté sa célèbre liste de vingt-trois problèmes ouverts (voir l'article qui suit) : la question concernant l'équidécomposabilité des polyèdres, troisième problème de cette liste, sera résolue la même année par Max Dehn.

Remplacer un objet géométrique par son image perfectionnée

Cette théorie de l'« égalité » des polygones est essentielle pour comprendre le rôle des formes primitives, telles que la ligne droite et le cercle, dans la théorie géométrique d'Euclide.

Vers la fin du livre 1, Euclide construit un rectangle égal (équidécomposable) à un polygone donné (proposition 45). Dans la proposition 46 suivante, il construit un carré avec un côté donné. Le livre 2 aboutit à la construction d'un carré égal à un rectangle donné, et donc, par les résultats du livre 1, égal à tout polygone donné. Les deux premiers livres résolvent donc le problème de la quadrature d'un polygone arbitraire, qui peut être décrit comme celui du remplacement d'un polygone donné par son image égale (au sens d'Euclide) mais quelque peu « perfectionnée », à savoir le carré.

Les livres 3 et 4 traitent des cercles et de diverses relations entre cercles et polygones, y compris les polygones réguliers inscrits et circonscrits d'un cercle donné. L'idée de remplacer des objets géométriques donnés par leurs images « perfectionnées » conduit ce développement théorique au problème de la quadrature du cercle. Cette question sera un problème géométrique phare jusqu'à ce que, au XIXe siècle, il soit rigoureusement prouvé qu'une telle construction ne peut être réalisée à la règle et au compas en un nombre fini d'étapes. Le rôle particulier du concept de cercle dans la géométrie d'Euclide nous aide aujourd'hui à mieux comprendre pourquoi ce problème était considéré comme important au départ.

Une autre classe importante de formes géométriques est constituée de solides tridimensionnels (ou 3D). Traitées dans les livres 11 à 13, ces formes comprennent la sphère, le *cylindre*, le *cône* et les cinq polyèdres réguliers. Même si ces objets ne peuvent pas être produits à la règle et le compas, leurs définitions sont données en termes de déplacement de lignes droites et de cercles (ou de leurs dérivés simples, comme les triangles et les demi-cercles). Ainsi, l'idée maîtresse de réduire les formes géométriques sophistiquées à deux formes primitives (la ligne et le cercle) reste à l'œuvre dans les livres stéréométriques des *Éléments*.

L'apogée de l'ouvrage est la construction de cinq polyèdres réguliers (dont toutes les faces sont des polygones réguliers égaux) et le calcul des rapports entre les côtés de ces polyèdres inscrits dans la même sphère (dernière proposition 18 du dernier livre 13). Pour résoudre ce défi (ardu, même encore aujourd'hui avec nos outils modernes), Euclide utilise les ressources de tous ses livres géométriques précédents. En analysant l'angle solide d'un polyèdre convexe, on peut constater (et démontrer, comme le fait Euclide) qu'il ne peut pas y avoir d'autres polyèdres réguliers : par des considérations combinatoires, l'angle solide peut être formé soit par trois triangles réguliers (cas du *tétraèdre*), par quatre triangles réguliers (*octaèdre*), par cinq triangles réguliers (*icosaèdre*), par trois carrés (*hexaèdre* ou *cube*), ou enfin par trois pentagones réguliers (*dodécaèdre*). Ces cinq polyèdres réguliers auront une influence durable, ravivée au XIXe siècle quand ils seront reliés à la théorie émergente des groupes, qui décrit les symétries associées à ces objets géométriques en termes algébriques rigoureux.

Une révision profonde de la notion de forme géométrique

La profonde révision de la notion de forme géométrique qui s'est produite au début de l'ère moderne a dépassé de loin le cadre des mathématiques pures. Pendant de nombreux siècles, *L'Almageste*, composé par l'astronome grec

Claude Ptolémée, au II^{e} siècle, a constitué une source astronomique de référence. Dans ce traité, l'auteur applique une technique géométrique qui permet de décrire les mouvements visibles des corps célestes comme une superposition de mouvements circulaires. Il utilise ainsi la même idée régulatrice qu'Euclide : analyser une forme géométrique sophistiquée (trajectoires visibles des corps célestes, planètes comprises) à partir de la forme élémentaire du cercle. Lorsque Johannes Kepler suggère en 1609 que les trajectoires des planètes pouvaient être mieux modélisées par des ellipses, cela a d'abord semblé scandaleux : cette hypothèse violait le principe de base de l'astronomie ptoléméenne (et euclidienne) selon lequel les formes géométriques élaborées doivent être expliquées en termes de lignes droites et de cercles. Ce n'est qu'après une révision importante des fondements de la géométrie effectuée par René Descartes, Isaac Barrow et bien d'autres qu'Isaac Newton a pu présenter en 1687 une théorie de la mécanique céleste entièrement libérée de l'idée de la primauté du cercle.

La variété des formes géométriques étudiées dans les mathématiques d'aujourd'hui est de loin plus vaste que celle en vigueur au XVII^{e} siècle. L'essor des géométries non euclidiennes et d'autres développements visant à élargir les modes antérieurs de pensée géométrique ont donné naissance à de nouvelles formes telles que les polygones hyperboliques, les espaces courbes, les objets fractals, les varifolds… que vous découvrirez dans cette brochure.

E.B., A.R. & F.W.

La *métamorphose* d'Euclide. Hervé Fischer, 1950.