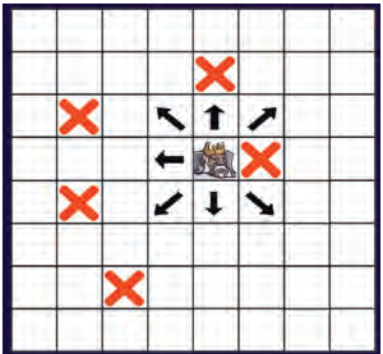
Une course démoniaque

Nicolas K. Blanchard*
Institut de recherche en informatique fondamentale

Prenez un échiquier, et mettez un roi sur une case proche du centre. Avec une amie, jouez au jeu suivant : à chaque tour, elle peut poser un obstacle sur l'échiquier, et vous pouvez déplacer le roi vers une case adjacente (diagonales comprises), à condition qu'elle ne contienne pas d'obstacle. Pouvez-vous atteindre le bord du plateau ?

Se déplacer en diagonale suffit pour s'échapper d'un plateau d'échec standard, mais qu'en est-il d'un plateau plus grand, par exemple un de taille $(2n+1)\times(2n+1)$ avec n un entier au moins égal à 4 ? Encercler complètement le roi nécessite $8n$ coups alors que ce dernier n'a besoin que de n coups pour arriver au bord. Mais il semble possible de mettre des obstacles sur ce bord, et d'en ajouter, au fur et à mesure que le roi se déplace, pour finir par l'emmurer tel Antigone.



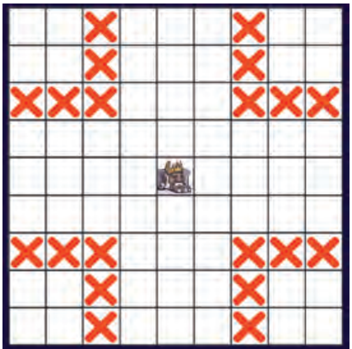
Les déplacements autorisés pour le roi. Les croix marquent la présence d'un obstacle, rendant la case inaccessible.

En effet, une stratégie existe et elle est même assez élémentaire. Elle consiste à bloquer les coins d'un grand carré, comme sur l'illustration qui suit. Ensuite, il suffit de condamner les cases du mur duquel se rapproche le roi au fur et à mesure.

Il faut cinq obstacles pour chacun des quatre coins, plus quelques coups supplémentaires pour commencer à bloquer les cases du mur dont le roi s'est approché. Le temps de faire cela, le roi aura pu se déplacer de vingt-quatre cases en partant du milieu. Un plateau de 49 par 49 cases suffit

*Sauf indication contraire explicite, tous les schémas ont été réalisés par Loïc Michel.

donc pour emprisonner le roi. En réalité, de meilleures stratégies existent, réduisant la taille du plateau jusqu'à 32 par 33 (charge à vous de les trouver, voire de faire mieux !).



La stratégie d'encerclement consiste à matérialiser les coins d'un carré qui emprisonnera à terme le roi.

La question naturelle est alors de savoir ce qu'il se passe quand on rend le roi « un peu plus fort ». C'est ce que demanda en 1982 John Horton Conway (qui, en plus d'être un mathématicien de renom, est aussi le créateur du fameux jeu de la vie). Le problème formel, connu sous le nom de *jeu de l'ange*, reste élémentaire à énoncer :

♦ Les deux joueurs, l'ange et le démon, jouent à tour de rôle sur un plateau infini (représenté par le réseau $\mathbb{Z}^2$ des couples d'entiers relatifs) ;

♦ À chacun de ses tours, le démon construit un mur sur une case ;

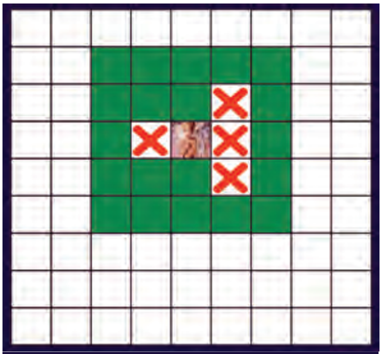
♦ À chacun de ses tours, l'ange se déplace depuis sa case actuelle vers n'importe quelle case vide se trouvant à une distance inférieure à une constante p ;

♦ Le démon gagne s'il a une stratégie lui permettant d'emprisonner l'ange en un nombre fini de tours, quelle que soit la stratégie de ce dernier. L'ange gagne s'il a une stratégie lui permettant toujours de s'échapper.

De la puissance (au moins mathématique) des anges

La distance p s'appelle *puissance de l'ange*, et définit une distance un peu particulière. Quand $p = 1$, l'ange se déplace comme un roi aux échecs. Lorsque $p = 2$, l'ange se déplace presque comme un roi jouant deux fois d'affilée. Cependant, contrairement au roi jouant deux fois, l'ange peut « voler » au-dessus d'un mur de cases occupées, tant qu'il arrive sur une case vide.

La question que posa Conway était donc de savoir s'il existait un entier p tel que l'ange de puissance p ait une stratégie gagnante.

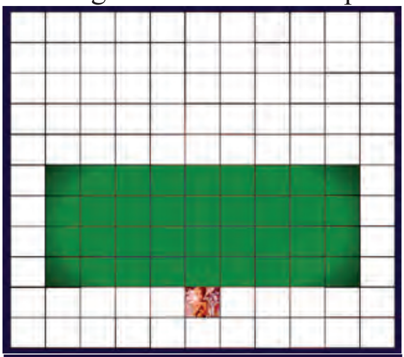


Les déplacements possibles pour un ange de puissance $p = 2$ en un seul mouvement (en vert).

Le problème peut paraître simple à première vue : si un ange de puissance 1 se déplace à la même vitesse que le démon maçon, il semble normal qu'il finisse emmuré. Mais dès la puissance 2, l'ange, pouvant aller plus vite que son ennemi ne peut construire d'obstacles et pouvant même sauter par-dessus ceux-ci, semble avoir la belle vie… .Notez que l'une des cases (au centre derrière le «mur» constitué des trois obstacles verticaux) ne serait pas accessible à un roi qui aurait deux coups d'affilée à jouer.

Pas si simple, le déplacement simpliste du simplet

Cependant, la réalité est un peu plus complexe. Prenons par exemple un cas d'ange un peu particulier, nommé le simplet. Ce dernier, pour se simplifier la vie, augmente à chaque tour sa coordonnée verticale (il va «vers le Nord»). Selon la théorie darwinienne, il ne doit plus rester grand nombre de simplets au paradis, car le démon peut les capturer, et ce quelle que soit leur puissance ! Prouvons-le.



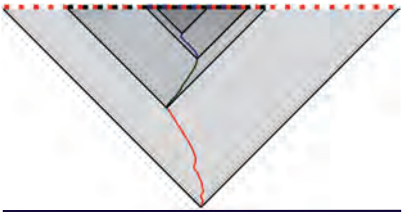
Le déplacement d'un simplet de puissance 4.

Prenons donc un simplet de puissance p, obligé d'aller vers le Nord d'au moins une case à chaque tour, mais pouvant se déplacer librement d'Est en Ouest (parmi les cases à distance p). La zone entière vers laquelle il pourra se déplacer au cours de son existence ressemble à un triangle, et chaque tour le restreint à un triangle, légèrement plus petit (mais contenant tout de même un nombre infini de cases). L'idée du démon va être de construire progressivement des murs à trous, puis de combler les trous là où il en aura besoin.

Par simplicité, considérons que le simplet est pressé et va toujours au Nord à la vitesse maximale, pouvant par contre aller librement à l'Est ou à l'Ouest. Le démon commence à une distance D au nord du simplet, où le cône a une largeur de 2Dp (l'ange pouvant se déplacer de p cases vers l'Ouest ou l'Est pendant chacun de ses D coups). Le démon va remplir une case toutes les 4p horizontalement d'un bout d'un triangle à l'autre, jusqu'à obtenir un mur (qui a certes plus de trous que de mur). Entre temps, le simplet s'est rapproché d'au plus D/2 cases.

Le démon regarde le nouveau triangle correspondant à la position du simplet, et se rend compte qu'à la place d'avoir un mur de longueur 2Dp à construire, le nouveau triangle est deux fois plus petit. Il remplit donc progressivement les trous de son mur-gruyère pendant D/4 coups. En continuant ainsi avec des murs de plus en plus petits mais de plus en plus solides, on peut arriver à construire un mur complet avant l'arrivée du simplet, tant que l'entier D est choisi suffisamment grand au départ.

Hélas (pour le démon), le simplet reste un ange et peut voler, il passera donc directement au-dessus du mur construit. Il faut donc un mur très épais (d'épaisseur p pour être exact). Heureusement, on peut altérer la stratégie légèrement : à la place de remplir une case toutes les 4p, le démon en remplit une toutes les 4p^2. Avec un entier D suffisamment grand, il aura le temps de construire non pas un mur, mais une muraille d'épaisseur p. Et en faisant un peu attention dans les calculs, on peut même capturer ainsi les simplets qui ne sont pas pressés…



La stratégie du démon face au simplet de puissance p.
(c) Leila Gabasova

DES FUYARDS ET DES QUESTIONS MISES À PRIX

Au-delà du simplet, dont le déplacement ne peut lui éviter d'être emmuré, de nombreuses stratégies similaires échouent, ayant souvent des noms farfelus. Par exemple, on peut citer la perte assurée de l'ange *laxiste* (terme d'origine), qui n'est pas obligé d'aller strictement vers le Nord à chaque coup, mais ne peut toujours pas aller vers le Sud, et de l'ange *relax*, qui a le droit de faire des petites excursions au Sud sans jamais descendre

« trop loin ». Un peu plus sophistiqué, l'ange *fuyard* cherche à s'éloigner à chaque pas de son point de départ sans aller dans une direction en particulier ; il perd lui aussi, ce qui se montre en faisant un pliage du plan en huit zones triangulaires et en simulant un démon par zone. Enfin, l'ange *intoxiqué* (qui se déplace au hasard) se fait capturer, et l'ange *en manque* (qui se déplace au hasard en allant de plus en plus vite) peut gagner ou perdre selon les conditions.

En posant le problème en 1982 et en montrant que les stratégies simples échouaient, John Conway promit une récompense à quiconque arriverait à exhiber ou bien une stratégie gagnante pour un ange d'une certaine puissance (100 $ à la clé) ou bien une stratégie gagnante pour le démon contre les anges de toutes puissances (1 000 $ à gagner).

Dans une belle coïncidence historique, quatre solutions utilisant des méthodes différentes apparurent en moins d'un an, entre 2006 et 2007 (l'histoire ne dit pas ce qu'il advint des 100 $). Celles-ci montrèrent non seulement que l'ange de puissance 2 gagnait, mais aussi que les anges de *puissances fractionnaires* (qui jouent certains coups à puissance 2 et d'autres à puissance 1) perdaient pour toute puissance *p* strictement comprise entre 1 et 2. La preuve la plus élégante est probablement celle d'András Máthé, dont on peut présenter l'idée générale.

Considérons un démon très gentil, qui promet de ne jamais construire un mur là où un ange est passé. Ce démon ne peut naturellement pas gagner avec les règles initiales, donc on considère qu'il gagne s'il arrive à emprisonner l'ange dans une zone bornée du plan. Máthé montre alors que si le démon a une stratégie pour capturer un ange de puissance *p*, alors le gentil démon a aussi une stratégie contre l'ange de puissance *p*.

Il définit ensuite un ange très particulier, appelé le *coureur*. Ce dernier vit dans un monde où le gentil démon a déjà construit des murs sur la moitié Ouest du plan. Il longe le mur avec un pinceau dans la main gauche en peignant le mur et en allant aussi vite que possible. Quand le gentil démon construit des murs sur son chemin, il les contourne en les longeant eux aussi. On peut alors montrer une propriété importante : s'il arrive au coureur de peindre le même mur deux fois, il commence par peindre deux fois le mur de la case de départ. Une fois ce point acquis, un coureur de puissance suffisamment grande (11 suffit) se déplace vers le Nord plus vite que le démon ne peut le forcer à aller vers le Sud. Il ne revient jamais sur ses pas et il n'est donc jamais bloqué par le gentil démon ! Or, si l'on arrivait à capturer l'ange, on arriverait à capturer le coureur. On ne peut donc pas capturer l'ange de puissance 11. Les calculs pour le faire avec un ange de puissance 2 sont similaires mais légèrement plus sophistiqués. Surprise mathématique supplémentaire : la preuve de Máthé n'utilise jamais le fait que l'ange a la capacité de survoler un mur…

Une histoire de piétons et de chauffards

Un jeu relié au problème de l'ange est celui du conducteur meurtrier. Ce dernier oppose une joueuse habile mais lente (se déplaçant d'une case à chaque fois) à un adversaire rapide mais moins manœuvrable (ne pouvant par exemple pas tourner à gauche, ou ne pouvant pas tourner deux fois d'affilée). Le but est le même : la piétonne peut-elle éviter le chauffard ? Ou est-elle condamnée à se faire aplatir ?

Depuis sa création en 1951, ce problème a reçu énormément d'attention, dans sa version discrète (sur le réseau $\mathbb{Z}^2$) mais surtout dans une version continue (où le rayon de braquage de l'automobiliste fou est « grand » par rapport à celui de sa cible). Cependant, aucun mystère derrière cet intérêt scientifique et industriel : ce problème historique (presque) innocent était une manière dissimulée de parler de guidages pour des missiles, sans enfreindre le secret militaire…

N.K.B.

Pour en savoir (un peu) plus :

The angel of power 2 wins. András Máthé, Combinatorics, Probability and Computing 16, 2007.

The Angel Problem, Positional Games, and Digraph Roots. Martin Kutz, thèse de doctorat, Berlin, 2004.

The King and the Consumer. Elwyn Berlekamp, John Conway et Richard Guy, chapitre 19 dans *Winning Ways for your Mathematical Plays, Volume 2 : Games in Particular*, Academic Press, 1982.

Homicidal Chauffeur Game : History and Modern Studies. Valerii Patsko et Varvara Turova, chapitre dans *Advances in Dynamic Games*, 2011.

Le problème de l'ange probabiliste. Nicolas K. Blanchard, disponible en ligne sur www.koliaza.com .